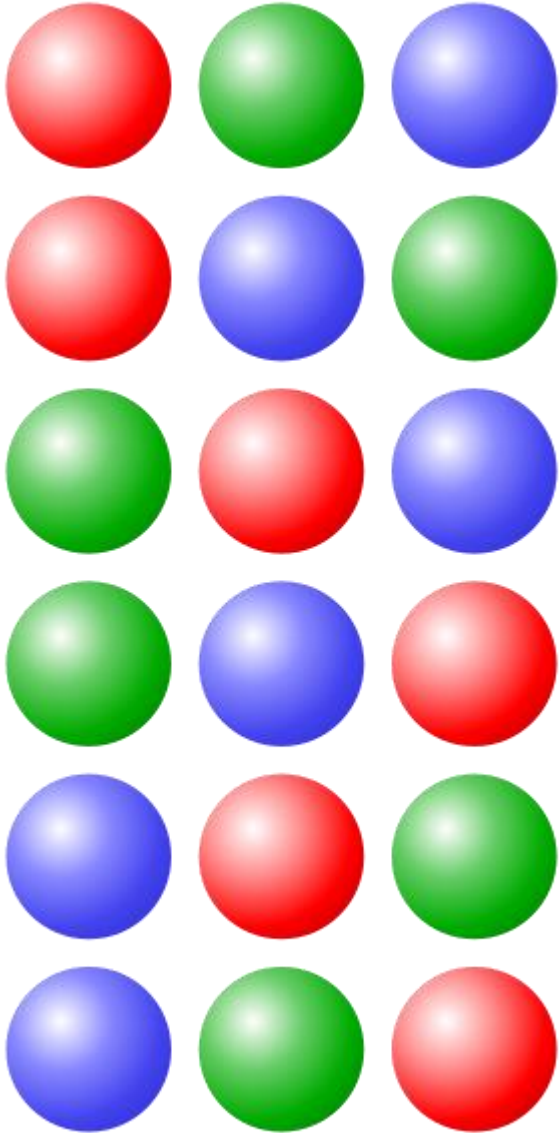


Rachunek prawdopodobieństwa

1.2. Permutacje

Przykład 1

Na ile sposobów można ustawić na półce trzy różne książki?



Przykład 2

Na ile sposobów można ustawić na półce cztery różne książki?

Przykład 2

Na ile sposobów można ustawić na półce cztery różne książki?

Oznaczamy książki numerami 1, 2, 3, 4 i wypisujemy wszystkie możliwe ustawienia:



1234	2134	3124	4123
1243	2143	3142	4132
1324	2314	3214	4213
1342	2341	3241	4231
1423	2413	3412	4312
1432	2431	3421	4321

Ćwiczenie 1

Wypisz wszystkie permutacje podanego zbioru.

a) $\{3, 5\}$

b) $\{3, 5, 7\}$

c) $\{3, 5, 7, 9\}$

Przykład 3

Na ile sposobów można ustawić na półce pięć różnych książek?

Ćwiczenie 2

Podaj liczbę, którą należy wstawić w miejsce $?$.

a) $4! = 3! \cdot ?$

b) $8! = 7! \cdot ?$

c) $12! = 11! \cdot ?$

Ćwiczenie 3

Uprość ułamek.

a) $\frac{5!}{4!}$

c) $\frac{8!}{10!}$

e) $\frac{(n+1)!}{n!}$

g) $\frac{(n+2)!}{n!}$

b) $\frac{7!}{5!}$

d) $\frac{102!}{100!}$

f) $\frac{(n-1)!}{n!}$

h) $\frac{(n-2)!}{n!}$

Ćwiczenie 4

Ile jest wszystkich permutacji zbioru A , jeśli wiadomo, że:

a) $\overline{\overline{A}} = 6,$

b) $\overline{\overline{A}} = 7,$

c) $\overline{\overline{A}} = 10,$

d) $\overline{\overline{A}} = 12?$

1. a) Ile liczb pięciocyfrowych można utworzyć, wykorzystując wszystkie cyfry liczby 56789?
b) Ile liczb sześciocyfrowych można utworzyć, wykorzystując wszystkie cyfry liczby 245768?

2. a) Ile jest liczb dziewięciocyfrowych, w których zapisie nie występuje cyfra 0 i żadna cyfra się nie powtarza?
b) Ile jest liczb dziesięciocyfrowych, w których zapisie żadna cyfra się nie powtarza?

3. Rozważmy liczby pięciocyfrowe, w których zapisie każda z cyfr 1, 2, 3, 4, 5 występuje dokładnie raz.
- a) Ile jest takich liczb mniejszych od 50 000?
 - b) Ile jest takich liczb większych od 30 000?

4. Z cyfr 4, 5, 6, 7, 8, 9 tworzymy liczby sześciocyfrowe o niepowtarzających się cyfrach. Ile można utworzyć takich liczb:
- a) podzielnych przez 5,
 - b) parzystych?

Z 5/16

5. Podaj liczbę elementów zbioru A , o którym wiadomo, że wszystkich możliwych jego permutacji jest:
- a) 24, b) 120, c) 40 320, d) 3 628 800.

Z 6/16

6. a) Zawodnikom przydzielono kolejne numery od 1 do n . Ile osób brało udział w zawodach, jeśli wiadomo, że numery startowe można było przydzielić na 5040 sposobów?
- b) Zawodnikom przydzielono kolejne numery od 1 do n . Najpierw rozdano numery parzyste, po czym okazało się, że numery nieparzyste można przydzielić na 720 sposobów. Ile osób brało udział w zawodach?

7. Na ile sposobów można zakwaterować cztery osoby: **Z 7/16**
- a) w czterech jednoosobowych pokojach,
 - b) w pięciu jednoosobowych pokojach?
8. a) Na ile sposobów można umieścić 7 kul w 7 szufladach (kule i szuflady rozróżniamy) tak, aby każda szuflada była zajęta? **Z 8/16**
- b) Na ile sposobów można umieścić 7 kul w 8 szufladach (kule i szuflady rozróżniamy) tak, aby tylko jedna szuflada była pusta?
-

9. a) Na ile sposobów można ustawić pięć osób w kolejce?
 b) Na ile sposobów można ustawić czworo dziewcząt i pięciu chłopców w kolejce tak, aby dziewczęta stały na początku kolejki?
 c) Na ile sposobów można ustawić troje dziewcząt i sześciu chłopców w kolejce tak, aby dziewczęta stały na końcu kolejki?

10. Oblicz.

a) $\frac{8!}{6!}$

d) $\frac{10!}{7! \cdot 3!}$

g) $\frac{5!}{4! + 5!}$

j) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$

b) $\frac{19!}{21!}$

e) $\frac{9! \cdot 4!}{12!}$

h) $\frac{5! + 6!}{6! - 5!}$

k) $\frac{(n+1)! - n!}{(n-1)!}$

c) $\frac{15!}{3! \cdot 13!}$

f) $\frac{100! \cdot 10!}{12! \cdot 98!}$

i) $\frac{(n-2)!}{(n-4)!}$

l) $\frac{(n-1)!(n+1)!}{(n!)^2}$

9. a) Na ile sposobów można ustawić dziewięć osób w kolejce?
 b) Na ile sposobów można ustawić czworo dziewcząt i pięciu chłopców w kolejce tak, aby dziewczęta stały na początku kolejki?
 c) Na ile sposobów można ustawić troje dziewcząt i sześciu chłopców w kolejce tak, aby dziewczęta stały na końcu kolejki?

Z 10/17

10. Oblicz.

a) $\frac{8!}{6!}$

d) $\frac{10!}{7! \cdot 3!}$

g) $\frac{5!}{4! + 5!}$

j) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$

b) $\frac{19!}{21!}$

e) $\frac{9! \cdot 4!}{12!}$

h) $\frac{5! + 6!}{6! - 5!}$

k) $\frac{(n+1)! - n!}{(n-1)!}$

c) $\frac{15!}{3! \cdot 13!}$

f) $\frac{100! \cdot 10!}{12! \cdot 98!}$

i) $\frac{(n-2)!}{(n-4)!}$

l) $\frac{(n-1)!(n+1)!}{(n!)^2}$

9. a) $9! = 362\,880$

b) $4! \cdot 5! = 2880$

c) $6! \cdot 3! = 4320$

10. a) $\frac{6! \cdot 7 \cdot 8}{6!} = 7 \cdot 8 = 56$

b) $\frac{19!}{19! \cdot 20 \cdot 21} = \frac{1}{420}$

c) $\frac{13! \cdot 14 \cdot 15}{3! \cdot 13!} = \frac{14 \cdot 15}{6} = 35$

d) $\frac{7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{7! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{6} = 120$

e) $\frac{9! \cdot 24}{9! \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12} = \frac{1}{55}$

f) $\frac{98! \cdot 99 \cdot 100 \cdot 10!}{10! \cdot 11 \cdot 12 \cdot 98!} = 75$

g) $\frac{4! \cdot 5}{4!(1+5)} = \frac{5}{6}$

h) $\frac{5!(1+6)}{5!(6-1)} = \frac{7}{5}$

i) $\frac{(n-4)! \cdot (n-3)(n-2)}{(n-4)!} =$
 $= n^2 - 5n + 6$

j) $\frac{(n-1)! \cdot n(n+1)}{(n-1)!} = n^2 + n$

k) $\frac{(n-1)!(n(n+1)-n)}{(n-1)!} = n^2$

l) $\frac{(n-1)! \cdot n! \cdot (n+1)}{(n-1)! \cdot n \cdot n!} = 1 + \frac{1}{n}$

11. a) Liczba permutacji zbioru $(n + 1)$ -elementowego jest o 600 większa od liczby permutacji zbioru n -elementowego. Oblicz n . **Z 11/17**
- b) Liczba permutacji zbioru $(n + 3)$ -elementowego jest 120 razy większa od liczby permutacji zbioru n -elementowego. Oblicz n . **Z 12/17**
12. Ile zer na końcu ma podana liczba?
- a) 15! b) 30! c) 100!

Zero na końcu iloczynu otrzymamy, gdy pomnożymy liczbę zakończoną cyfrą 5 przez liczbę parzystą lub gdy czynnikiem iloczynu jest liczba zakończona zerem.

13. Ile liczb n -cyfrowych można utworzyć, wykorzystując wszystkie cyfry podanej liczby? **Z 13/17**
- a) 234 i $n = 3$ b) 4567 i $n = 4$ c) 123456 i $n = 6$
14. Ile można utworzyć kodów mających na początku n liter, a następnie m cyfr, jeśli wykorzystujemy wszystkie podane litery i cyfry? **Z 14/17**
- a) A, B, 2, 4, 6 i $n = 2, m = 3$
b) A, B, C, 1, 3, 5, 7 i $n = 3, m = 4$
c) A, B, C, D, 3, 6, 9 i $n = 4, m = 3$
15. Pięciu przyjaciół wybrało się do kina. Na ile sposobów mogą oni usiąść na pięciu miejscach? **Z 15/17**
16. Tramwajem zatrzymującym się na 8 przystankach jedzie 7 osób. Na ile sposobów mogą one wysiąść z tramwaju, jeśli każda z nich: **Z 16/17**
- a) wysiada na innym przystanku,
b) wysiada na innym przystanku, ale nikt nie wysiada na pierwszym przystanku?

Mamy do dyspozycji klocki z literami: **K, R, A, M**.

Zmieniając kolejność liter, otrzymujemy czteroliterowe słowa (mające sens lub nie).

Wyznacz wszystkie możliwe słowa.

$$4! = 24$$

KRAM, KRMA, KARM, KAMR, KMRA, KMAR, RKAM, RKMA, RAKM, RAMK, RMAK, RMKA, MAKR, MARK, MRKA, MRAK, MKAR, MKRA, AMRK, AMKR, ARMK, ARKM, AKRM, AKMR.
--

Permutacje z powtórzeniami

Mamy do dyspozycji klocki z literami: **K, A, R, A**.

Zmieniając kolejność liter, otrzymujemy czteroliterowe słowa (mające sens lub nie).

Wyznacz wszystkie możliwe słowa.

Mamy do dyspozycji klocki z literami: **T, A, T, A**.

Zmieniając kolejność liter, otrzymujemy czteroliterowe słowa (mające sens lub nie).

Wyznacz wszystkie możliwe słowa.

Mamy do dyspozycji klocki z literami: **K, R, A, M**.

Zmieniając kolejność liter, otrzymujemy czteroliterowe słowa (mające sens lub nie).

Wyznacz wszystkie możliwe słowa.

$$4! = 24$$

KRAM, KRMA, KARM, KAMR, KMRA, KMAR,
RKAM, RKMA, RAKM, RAMK, RMAK, RMKA,
MAKR, MARK, MRKA, MRAK, MKAR, MKRA,
AMRK, AMKR, ARMK, ARKM, AKRM, AKMR.

Permutacje z powtórzeniami

Mamy do dyspozycji klocki z literami: **K, A, R, A**.

Zmieniając kolejność liter, otrzymujemy czteroliterowe słowa (mające sens lub nie).

Wyznacz wszystkie możliwe słowa.

$$\frac{4!}{2! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{24}{2} = 12$$

KARA, KAAR, KRAA, RAKA, RAAK, RKA
AKRA, ARKA, AARK, AAKR, AKAR, ARAK.

Mamy do dyspozycji klocki z literami: **T, A, T, A**.

Zmieniając kolejność liter, otrzymujemy czteroliterowe słowa (mające sens lub nie).

Wyznacz wszystkie możliwe słowa.

$$\frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{24}{4} = 6$$

TATA, TAAT, ATAT, ATTA, AATT, TTAA.

1. a) Ile siedmioliterowych słów (mających sens lub nie) możemy otrzymać, przestawiając litery w słowie BARBARA?

Z 1/18

b) Ile dziewięcioliterowych słów (mających sens lub nie) możemy otrzymać, przestawiając litery w słowie KATAPULTA?

Z 2/18

2. Ile dziesięciocyfrowych liczb możemy otrzymać, przestawiając cyfry w liczbie:

a) 1 222 333 444,

b) 9 989 879 876?